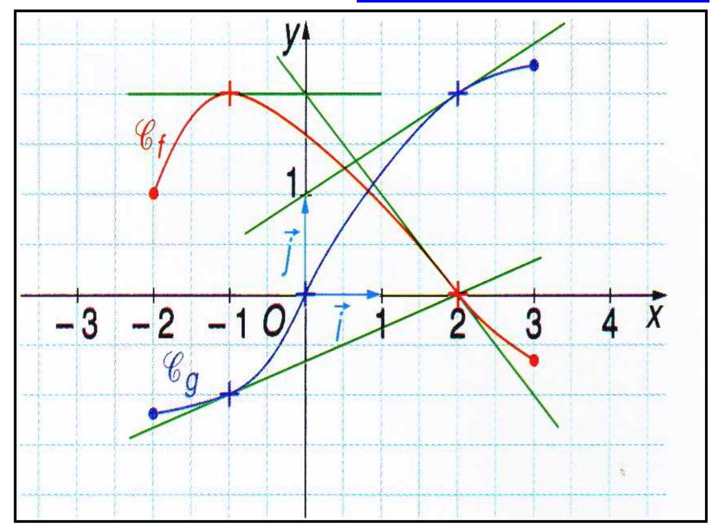
❶ الاشتقاقية:

① مناقشة النشاط 01 ص 40:



1.حساب الأعداد المشتقة:

نعلم أنّ العدد المشتق لدالة عند عدد حقيقي يُمثل معامل توجيه المماس عند هذا العدد.

بصفة عامة:

$f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند ذات الفاصلة x_0، ولحسابه نختار نقطتين من المماس مثلا: $A(x_A;y_A)$ وَ $B(x_B;y_B)$ نجد: $f'(x_0)=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$.

- $f'(-1)=0$.
- $g'(-1)=\frac{0+1}{2+1}=\frac{1}{3}$.
- $f'(2)=\frac{0-2}{2-0}=-1$.
- $g'(2)=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$.
- $(f+g)'(-1)=f'(-1)+g'(-1)=\frac{1}{3}$.
- $(f.g)'(2)=f'(2).g(2)+g'(2).f(2)=\frac{2}{3}$.
- $\left(\frac{3}{f}\right)'(-1)=\frac{-3f'(-1)}{[f(-1)]^2}=0$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2).g(2)-g'(2).f(2)}{[g(2)]^2}=-\frac{1}{2}$.

2.حساب $h'(0)$ وَ $h'\left(\frac{3}{2}\right)$، حيث من أجل $x\in[0;2]$

لدينا: $h(x)=f(2x-1)$

لدينا: $h'(x)=2f'(2x-1)$.

- $h'(0)=2f'(-1)=0$.
- $h'\left(\frac{3}{2}\right)=2f'(2)=-2$.

② العدد المشتق –الدّالة المشتقة:

تعريف:

f دالّة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.
x_0 وَ x_0+h عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$.
▪ **f تقبل الاشتقاق عند x_0** إذا قبلت النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية **محدودة** لما يؤول h إلى 0.
تسمى هذه النهاية **العدد المشتق للدّالة f عند x_0**، ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

ملاحظات:

▪ العدد المشتق: $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

بوضع $x=x_0+h$ نجد: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

▪ إذا قبلت **f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I** نقول أنّها **تقبل الاشتقاق على I وَدّالتها المشتقة** هي $f':x\mapsto f'(x)$.

مثال: (● حل التمرين 01 ص58)

f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

أ.التحقق أنّه من أجل كل h غير معدوم يكون:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

لدينا: $\begin{cases} f(1+h)=\sqrt{(1+h)^2+3}=\sqrt{h^2+2h+4} \\ f(1)=\sqrt{1^2+3}=\sqrt{4}=2\end{cases}$

ومنه:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{h^2+2h+4}-2}{h}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{h^2+2h+4}-2\right)\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}{h\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{h^2+2h+4}^2-2^2}{h\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}$$
$$=\frac{h^2+2h+4-4}{h\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}$$
$$=\frac{h(h+2)}{h\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

ب.استنتاج أنّ الدّالة f تقبل الاشتقاق عند 1:

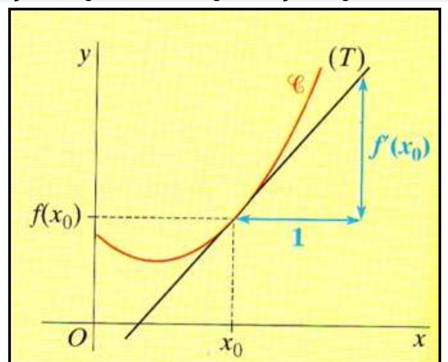
لدينا: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=f'(1)$

إذن: f قابلة للاشتقاق عند 1، وعددها المشتق عند 1 هو: $\boxed{f'(1)=\frac{1}{2}}$.

③ التفسير البياني (مماس منحنى دّالّة):

تعريف وخاصية:

إذا قبلت الدّالّة f الاشتقاق عند x_0، فإنّ منحناها البياني يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماسا معامل توجيهه $f'(x_0)$ ومعادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



مثال 01: (● حل التمرين 04 ص58)

لدينا: f معرّفة على $\mathbb{R}$ وَ**قابلة للاشتقاق عند 0**، أي: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=l\in\mathbb{R}$؛ حيث $l=f'(0)$.

1) تحديد $f(0)$ وَ $f'(0)$:

المستقيم (T) ذو المعادلة $y=2-3x$، هو مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(0;2)$ معناه: $\begin{cases} y=-3x+2 \\ y=f'(0)(x-0)+f(0)\end{cases}$،

ومنه: $\begin{cases} y=-3x+2 \\ y=f'(0)\times x+f(0)\end{cases}$

بالمطابقة نجد: $\boxed{\begin{cases} f'(0)=-3 \\ f(0)=2\end{cases}}$.

2) تفسير هندسيا الحد $\frac{f(x)-2}{x}$ من أجل $x\neq 0$:

نلاحظ أنّ: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-2}{x}$، إذن: $\frac{f(x)-2}{x}$ هي **نسبة تزايد الدّالّة f** بين العددين x وَ0.

3) تبرير وجود $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-3$

لأنّ: f **قابلة للاشتقاق عند 0.**

مثال 02:

(● دراسة قابلية اشتقاق دالّة عند قيمة من اليسار ومن اليمين)

f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=|x^2-4|$.

لدينا: $f(x)=|x^2-4|$

$$=\begin{cases} x^2-4\,; x^2-4\geq 0 \\ -(x^2-4)\,; x^2-4\leq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2-4\,; x\in\,]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[\\ -x^2+4\,; x\in[-2;2]\end{cases}$$

⌫ **لندرس قابلية اشتقاق الدّالّة f عند** (-1):

بمأنّ: $-1\in[-2;2]$، فإنّ: $f(x)=-x^2+4$.

لدينا: $f(-1)=-(1)^2+4=3$

ومنه:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+4-3}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(1-x)(1+x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(1-x)=2=f'(-1)$$

إذن: f **قابلة للاشتقاق** عند (-1)، وعددها المشتق عند (-1) هو: $\boxed{f'(-1)=2}$.

2) التفسير الهندسي:

(C_f) **يقبل مماساً** عند النقطة ذات الفاصلة (-1)،

معامل توجيهه: $\boxed{f'(-1)=2}$؛

ومعادلته: $y=f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1)$،

أي: $\boxed{y=2x+5}$.

⌫ **لندرس قابلية اشتقاق الدّالّة f عند** 2:

أ- على المجال $[-2;2]$، لدينا: $f(x)=-x^2+4$.

لدينا: $f(2)=-(2)^2+4=0$

ومنه:

$$\lim_{\substack{<\\x\to}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{<\\x\to}}\frac{-x^2+4-0}{x-2}$$
$$=\lim_{\substack{<\\x\to}}\frac{-x^2+4}{x-2}$$
$$=\lim_{\substack{<\\x\to}}\frac{(2-x)(2+x)}{x-2}$$
$$=\lim_{\substack{<\\x\to}}\frac{-(x-2)(2+x)}{x-2}$$
$$=\lim_{\substack{<\\x\to 2}}[-(2+x)]=-4=f'_g(2)$$

إذن: f **قابلة للاشتقاق** عند 2 **من اليسار**، وعددها المشتق عند 2 من اليسار هو: $\boxed{f'_g(2)=-4}$.

ب- على المجال $[2;+\infty[$، لدينا: $f(x)=x^2-4$.

لدينا: $f(2)=(2)^2-4=0$

ومنه:

$$\lim_{\substack{>\\x\to}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{>\\x\to}}\frac{x^2-4-0}{x-2}$$
$$=\lim_{\substack{>\\x\to}}\frac{x^2-4}{x-2}$$
$$=\lim_{\substack{>\\x\to 2}}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{\substack{>\\x\to 2}}(x+2)=4=f'_d(2)$$

إذن: f **قابلة للاشتقاق** عند 2 **من اليمين**، وعددها المشتق عند 2 من اليمين هو: $\boxed{f'_d(2)=4}$.

نتيجة:

بمأنّ: $\boxed{f'_g(2)\neq f'_d(2)}$، فإنّ: f **غير قابلة للاشتقاق** عند 2.

2) **التفسير الهندسي:**

(C_f) **يقبل نصفي مماسين** عند النقطة ذات الفاصلة 2، وتسمى هذه النقطة **نقطة زاوية** للمنحنى (C_f).

معامل توجيه كل منهما: $f'_g(2) = -4$ ؛ وَ $f'_d(2) = 4$.

ومعادلة كل منهما:

$\begin{cases} x \leq 2 \\ y = f'_g(2)(x-2) + f(2) \end{cases}$، **أي:** $y = -4x + 8$.

وَ $\begin{cases} x \geq 2 \\ y = f'_d(2)(x-2) + f(2) \end{cases}$، **أي:** $y = 4x - 8$.

تمارين: 04؛ 07؛ 08 ص58.

❷ الاستمرارية:

نشاط مقترح من طرف الأستاذ:

نعتبر الدّالتان f وَ g المعرّفتان على المجال $[-2;2]$ كما يلي:

$\begin{cases} f(x) = x+2; x \in [-2;0[\\ f(x) = x^2+1; x \in [0;2] \end{cases}$ وَ $g(x) = |x| + 1$.

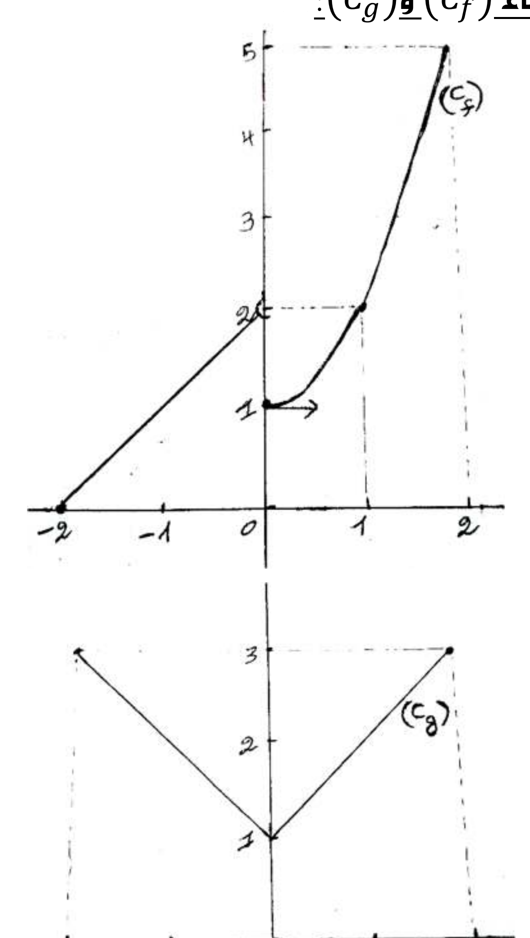
وليكن (C_f) وَ (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب.

1) أنشئ في معلمين مختلفين (C_f) وَ (C_g).

2) هل يُمكنك إنشاء المنحنيين (C_f) وَ (C_g) بدون رفع القلم (اليد)؟

حل النشاط:

1) **إنشاء** (C_f) **وَ** (C_g):



2) **لا يُمكن** رسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2;2]$ **بدون رفع القلم (اليد)**، بينما **يُمكن** رسم المنحنى (C_g) على المجال $[-2;2]$ **بدون رفع القلم (اليد)**.

الخلاصة:

- الدّالة f **غير مستمرة على مجال** $[-2;2]$.
- الدّالة g **مستمرة على مجال** $[-2;2]$.

① **الاستمرارية:**

التفسير البياني:

تكون الدّالة f **مستمرة على مجال** I، عندما يُمكن رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

② **خواص (تُقبل دون برهان):**

نقبل بأنّ كل الدّوال المقررة في هذا المستوي والمُحصل عليها بالعمليات على دّوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج:

- **الدّوال المرجعية مستمرة** على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- **الدّوال كثيرات الحدود،** $\sin$ وَ $\cos$ **مستمرة** على $\mathbb{R}$
- **الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة** على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- **مجموع؛ جداء؛ وَمُركب دّوال مستمرة** هو دّالة مستمرة.

مثال: (● حل التمرين 47 ص29)

f دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2 - x)\sin x$.

⌫ الدّالة f مستمرة على $\mathbb{R}$، لأنّها عبارة عن جداء دّالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$؛ وهما الدّالة $\sin$ وَ $x \mapsto x^2 - x$.

تمرين: 49 ص29. (التعرف على الدّالة الجزء الصحيح)

❸ مبرهنة القيم المتوسطة:

حل النشاط 4 ص7:

1. الدّالتان f وَ g مستمرتان على المجال $[-1;2]$، أما h فهي غير مستمرة على المجال $[-1;2]$.

2. **بواسطة قراءة بيانية تحديد، حسب قيم العدد الحقيقي** k**، عدد حلول كل معادلة:**

بصفة عامة:

حلول المعادلة $f(x) = k$ **بيانياً** هي **فواصل نقط تقاطع** المنحنى (C_f) **مع المستقيم ذو المعادلة** $y = k$.

بالنسبة للمعادلة $f(x) = k$ (1)

من أجل	فإنّ المعادلة $f(x) = k$
$-2 \leq k \leq 3$	تقبل حل وحيد.

بالنسبة للمعادلة $g(x) = k$ (2)

من أجل	فإنّ المعادلة $g(x) = k$
$1 < k \leq 3$ أو $-2 \leq k < 0$	تقبل حل وحيد.
$k = 1$ أو $k = 0$	تقبل حلين.
$0 < k < 1$	تقبل ثلاث حلول.

بالنسبة للمعادلة $h(x) = k$ (3)

من أجل	فإنّ المعادلة $h(x) = k$
$2 < k \leq 3$ أو $-2 \leq k \leq 0$	تقبل حل وحيد.
$0 < k \leq 2$	لا تقبل حلول.

3.تُمثل القيمتان 2- و3 حدود المجال $[-2;3]$، صورتي القيمتين 1- وَ2 حدود المجال $[-1;2]$.

4.**من أجل كل عدد حقيقي** k **من المجال** $[-2;3]$،

- المعادلتان $f(x) = k$ وَ $g(x) = k$ **تقبلان حلا على الأقل** في المجال $[-1;2]$، أما المعادلة $h(x) = k$ فلا.
- المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا وحيدا** في المجال $[-1;2]$، أما المعادلتان $g(x) = k$ وَ $h(x) = k$ فلا.

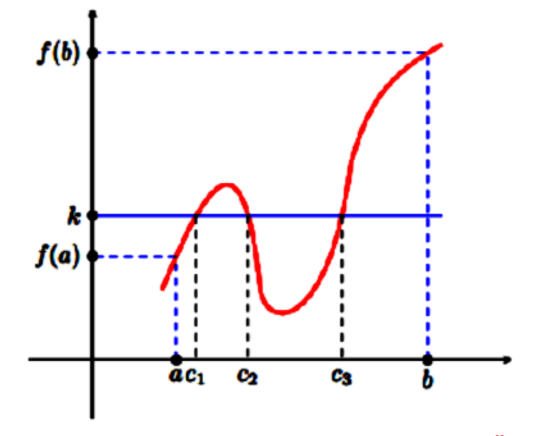
① **مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان):**

مبرهنة:

f دالّة معرّفة ومستمرة على مجال $[a;b]$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$، **يوجد على الأقل** عدد حقيقي c محصور بين a وَ b بحيث $f(c) = k$.

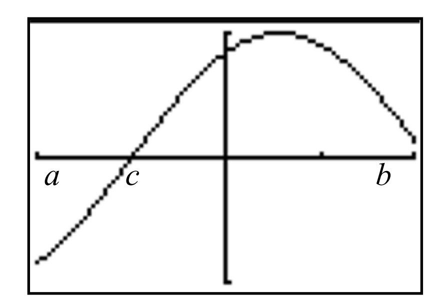
② **التفسير البياني:**

f دالّة معرّفة ومستمرة على مجال $[a;b]$، وليكن (C) منحناها البياني في معلم $(O;I;J)$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a وَ b.
(بالنسبة للشكل التالي (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).



حالة خاصة:

إذا كانت f دالّة معرّفة ومستمرة على مجال $[a;b]$، وكان $f(a) \times f(b) < 0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$)، فإنّه **يوجد على الأقل** عدد حقيقي c محصور بين a وَ b بحيث $f(c) = 0$.
أي أنّ: f **تنعدم على الأقل مرة واحدة** على مجال $[a;b]$.



③ **المعادلة** $f(x) = k$**:**

إذا كانت f دالّة معرّفة ومستمرة على مجال $[a;b]$، فإنّه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

ملاحظة:

مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وُجود حل على الأقل للمعادلة $f(x) = k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

مثال: (● حل التمرين 50 ص29)

طريقة:

لإثبات **وُجود حلول معادلة** على مجال $[a;b]$ **باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة** نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x) = k$.
- نتحقق من **استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$.
- نتحقق من أنّ العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

البرهان باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أنّ المعادلة $x^3 - 4x = -2$ **تقبل على الأقل حلا في المجال** $[-3;-2]$:

الطريقة الأولى: يُمكن كتابة المعادلة $x^3 - 4x = -2$ على الشكل $f(x) = -2$ حيث f هي الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 4x$.

- الدّالة f دّالة كثير حدود وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ ومن ثَمَّ على $[-3;-2]$.
- لدينا: $\begin{cases} f(-3) = -15 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$، كما نلاحظ أن العدد -2 محصور بين العددين $f(-3)$ وَ $f(-2)$.

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $x^3 - 4x = -2$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $[-3;-2]$.

الطريقة الثانية: يُمكن كتابة المعادلة $x^3 - 4x = -2$ على الشكل $f(x) = 0$ حيث f هي الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 4x + 2$.